

СПИСОК ВОПРОСОВ, ВЫНОСИМЫЙ НА ЗАЧЕТ

1. Открытые и замкнутые множества на прямой. Канторово множество и его свойства.
2. Свойства внешней меры. Измеримость открытого множества и счетного объединения измеримых множеств. Измеримость замкнутого множества, дополнения измеримого множества, разности и счетного пересечения измеримых множеств.
3. Свойство счетной аддитивности (σ -аддитивности) меры. Множества типа G_δ и F_σ . Пример неизмеримого множества.
4. Измеримые функции и их свойства. Измеримость верхнего и нижнего пределов последовательности измеримых функций.
5. Измеримость предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций. Сходимость по мере. Связь между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.
6. Теорема Рисса. Эквивалентность функций, являющихся пределами по мере одной последовательности измеримых функций.
7. Интеграл Лебега от ограниченной функции. Интегрируемость ограниченной и измеримой функции на множестве конечной меры.
8. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.
9. Интеграл Лебега от неограниченной и неотрицательной функции. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Мажорантный признак суммируемости.
10. Интеграл Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.
11. Полная аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега от неограниченной функции любого знака. Теорема Леви и следствие ее для рядов. Теорема Лебега-критерий интегрируемости.
12. Теорема Фубини. Интеграл Лебега для множества бесконечной меры.
13. Классы L_p , $p > 1$. Неравенства Гельдера и Минковского.
14. Полнота пространства L_p .
15. Плотность множества непрерывных функций в L_p . Непрерывность в метрике L_p .
16. Метрические пространства. Теорема о вложенных шарах.
17. Принцип сжатых отображений. Теорема Бэра о категориях.
18. Линейные нормированные пространства. Теорема Рисса.
19. Линейные операторы и их свойства. Теорема о полноте пространства линейных ограниченных операторов.
20. Теорема Банаха-Штейнгауза (принцип равномерной ограниченности) и следствие из нее. Пример из теории рядов Фурье на применение теоремы Банаха-Штейнгауза.
21. Обратный оператор. Достаточные условия существования обратного оператора.
22. Теорема Банаха об обратном операторе.
23. Теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала в линейном нормированном пространстве.
24. Общий вид линейного функционала в конкретных пространствах.
25. Слабая сходимость. Связь между сильной и слабой сходимостью. Критерий сильной сходимости.
26. Определение гильбертова пространства и его основные свойства. Теорема об элементе с наименьшей нормой.
27. Теорема Леви об ортогональной проекции. Разложение гильбертова пространства на прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

28. Теорема Рисса-Фреше об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве.
29. Ортонормированные системы. Ортогонализация по Шмидту. Неравенство Бесселя. Полнота и замкнутость ортонормированной системы. Слабая сходимость ее к нулю.
30. Теорема о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Теорема об изоморфизме и изометрии всех сепарабельных гильбертовых пространств.
31. Теорема Рисса-Фишера. Теорема о слабой компактности сепарабельного гильбертова пространства.
32. Сопряженный оператор, теорема о сопряженном операторе, Теорема о прямой сумме замыкания образа линейного ограниченного оператора и ядра сопряженного.
33. Вполне непрерывный оператор. Пример интегрального вполне непрерывного оператора. Свойства вполне непрерывного оператора.
34. Первая теорема Фредгольма.
35. Вторая теорема (альтернатива) Фредгольма.
36. Третья теорема Фредгольма.
37. Понятие и спектре линейного оператора в бесконечномерных пространствах. Теорема Гильберта-Шмидта.

Список задач по функциональному анализу (2013 год).

1. Пусть X - линейное нормированное пространство. Доказать, что для любых элементов $x, y \in X$ выполняется неравенство $\|x\| \leq \max(\|x+y\|, \|x-y\|)$.
2. Можно ли в пространстве $C^1[a, b]$ принять за норму элемента $x(t)$
 - A) $\max_{t \in [a, b]} |x(t)|$;
 - B) $\max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;
 - C) $|x(b) - x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;
 - D) $|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$;
 - E) $\int_a^b |x(t)| dt + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$?
3. Будет ли множество всех многочленов в пространстве $C[a, b]$
 - A) открытым; B) замкнутым?
4. Доказать, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейной нормированном пространстве есть подпространство.
5. Пусть X - линейное нормированное пространство. $L \subset X$ - линейное многообразие, $L \neq X$. Доказать, что L не содержит никакого шара.
6. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций:
 - A) монотонные функции; B) четные функции; C) многочлены; D) непрерывные кусочно-линейные функции?
7. Образуют ли в пространстве $C[-1, 1]$ подпространство следующие множества функций:
 - A) многочлены степени $\leq k$; B) непрерывно дифференцируемые функции;
 - C) непрерывные функции с ограниченной вариацией; D) функции $x(t)$, удовлетворяющие условию $x(0) = 0$?
8. Пусть X - линейное нормированное пространство, множество $A \subset X$ - фиксировано. Доказать, что $f(x) = \rho(x, A)$ - непрерывное отображение X в $\mathbb{R}$.
9. Доказать, что всякое конечномерное линейное нормированное пространство является банаховым.
10. Доказать, что подпространство банахова пространства является банаховым пространством.
11. Может ли в банаховом пространстве иметь пустое пересечение последовательность непустых замкнутых вложенных множеств?
12. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место тождество Аполлония: $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$.
13. Доказать, что для того чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство $\|x\| \leq \|x-y\|$.
14. Доказать, что при фиксированном натуральном n множество $M = \{x \in l_2, x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{k=1}^n x_k = 0\}$ является подпространством пространства l_2 .

Описать такое подпространство N , что $l_2 = M \oplus N$.

15. В пространстве l_2 рассмотрим последовательность $x_k = (1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, \dots)$, $k \in N$. Доказать, что линейная оболочка этой последовательности всюду плотна в пространстве l_2 .

16. Доказать, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найти их нормы:

А) $A : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$;

В) $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = t \int_0^1 x(\tau) d\tau$.

17. Пусть X и Y - линейные нормированные пространства, $A : X \rightarrow Y$ - линейный оператор с областью изменения $R(A)$.

А) Доказать, что $R(A)$ - линейное многообразие в Y .

В) Всегда ли $R(A)$ - подпространство в Y ?

18. Доказать, что в банаховом пространстве X для любого $A \in L(X \rightarrow X)$ определены операторы $\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$.

19. Пусть X - банахово пространство, $A \in L(X \rightarrow X)$. Доказать, что $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$. Найти e^I , где I - тождественный оператор.

20. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \frac{d^2x}{dt^2} + x(t)$ с областью определения $D(A)$ - линейным многообразием дважды непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x'(0) = 0$. Найти A^{-1} и доказать, что он ограничен.

21. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t e^{-t+s} x(s) ds$.

Существует ли оператор A^{-1} ?

22. Рассмотрим оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau + x(t)$.

Пусть $N(A)$ - ядро оператора A .

А) Доказать, что $N(A) = \{0\}$, так что при любом $y \in C[0, 1]$ уравнение $Ax = y$ не может иметь более одного решения.

В) Найти оператор A^{-1} и доказать, что он ограничен.

23. Доказать, что оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = x(t) + \int_0^1 e^{s+t} x(s) ds$ имеет ограниченный обратный и найти A^{-1} .

24. Пусть X - комплексное линейное пространство, f - определенный на X и не равный тождественно нулю линейный функционал. Доказать, что область значений f есть все C .

25. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1, 1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

А) $f(x) = \langle x, f \rangle = 2[x(1) - x(0)]$;

В) $f(x) = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^0 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt$.

26. Доказать, что следующие функционалы в пространстве $C[-1, 1]$ являются линейными непрерывными и найти их нормы:

$$A) f(x) = \langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k x(t_k);$$

$$B) f(x) = \langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 x(t) dt - x(0),$$

где $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $t_k \in [-1, 1]$.

27. Будут ли ограничены в пространстве $C[0, 1]$ следующие линейные функционалы:

$$A) \langle x, f \rangle = \int_0^1 x(t^2) dt; \quad B) \langle x, f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x(t^n) dt?$$

28. Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы:

$$A) \langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt; \quad x \in C^1[-1, 1]; \quad B) \langle x, f \rangle = \int_{-1}^1 tx(t) dt; \quad x \in L[-1, 1].$$

29. Доказать, что функционал $\langle x, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$; $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1$, является линейным непрерывным, и найти его норму.

30. Для $x(t) \in C[-1, 1]$ положим $\langle x, f \rangle = \frac{x(-1) + x(1)}{2} + \int_{-1}^1 tx(t) dt$. Доказать, что f - ограниченный линейный функционал.

31. Найти сопряженный к оператору $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, если

$$A) Ax(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau; \quad B) Ax(t) = \int_0^1 tx(s) ds.$$

32. Найти сопряженный к оператору $A : l_2 \rightarrow l_2$, если

$$A) Ax = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots);$$

$$B) Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$$

при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

33. Найти сопряженный к оператору $A : l_2 \rightarrow l_2$, если

$$A) Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}; \quad |\lambda_n| \leq 1;$$

$$B) Ax = (x_2, x_3, \dots)$$

при $x = (x_1, x_2, \dots)$.

34. Какие из следующих операторов $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ являются вполне непрерывными:

$$A) Ax(t) = tx(t);$$

$$B) Ax(t) = \int_0^1 x(\tau) d\tau;$$

$$C) Ax(t) = x(0) + tx(1);$$

$$D) Ax(t) = \int_0^1 e^{ts} x(s) ds;$$

$$E) Ax(t) = x(t^2)?$$

35. Будет ли вполне непрерывным оператор $A : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$, $Ax(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$?

36. При каком условии на функцию $\varphi(t) \in C[0, 1]$ оператор $A : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ будет вполне непрерывным?

37. Будет ли вполне непрерывным оператор $Ax(t) = \frac{dx}{dt}$, если он рассматривается как действующий:

А) $A : C^1[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$; В) $A : C^2[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$; С) $A : C^2[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$?

38. Сформулировать критерий компактности в l_p . Какие из следующих операторов $A : l_2 \rightarrow l_2$ вполне непрерывны (при $x = (x_1, x_2, \dots)$):

А) $Ax = (0, x_1, x_2, \dots)$; В) $Ax = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$; С) $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$?

39. Доказать, что оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $\sup_k |\lambda_k| < \infty$, есть самосопряженный оператор. При каком условии на последовательность λ_k он будет неотрицательным?

40. Доказать, что оператор $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = tx(t)$ есть неотрицательный самосопряженный оператор.

41. Доказать, что оператор $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^1 e^{s+t} x(s) ds$ является самосопряженным и неотрицательным.

42. Пусть $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$ фиксировано. Доказать, что разностный оператор $A : L_2(-\infty, \infty) \rightarrow L_2(-\infty, \infty)$, $Ax(t) = \frac{t}{h}[x(t + \frac{h}{2}) - x(t - \frac{h}{2})]$ является самосопряженным.

43. Пусть A - самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H , причем $A \neq 0$. Доказать, что если существует ограниченный оператор A^{-1} , то обратный оператор тоже самосопряжен.

44. Пусть A - ограниченный самосопряженный оператор, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Im} \lambda \neq 0$. Доказать, что оператор $(A - \lambda \cdot I)^{-1}$ существует.

45. Рассмотрим оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (0, 0, x_3, x_4, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$. Доказать, что A самосопряжен в l_2 и $A \geq 0$. Найти оператор $\sqrt{A}$.

46. В вещественном линейном пространстве $C[-\pi, \pi]$ найти собственные значения и собственные векторы оператора

А) $Ax(t) = x(-t)$; В) $Ax(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s+t)x(s)ds$.

47. В пространстве $C[0, 1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = x(0) + tx(1)$. Найти $\sigma(A)$, $r_\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$.

48. Рассмотрим оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$, где $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $\sup |\lambda_n| < +\infty$. Найти $\sigma(A)$.

49. Доказать, что оператор $A : l_2 \rightarrow l_2$, $Ax = (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ для $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ вполне непрерывен и найти его спектр.

50. Доказать, что оператор $A : L_2[-1, 1] \rightarrow L_2[-1, 1]$, $Ax(t) = \int_{-1}^1 s^2 tx(t) dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.

51. Доказать, что оператор $A : L_2[0, 1] \rightarrow L_2[0, 1]$, $Ax(t) = \int_0^1 st(1-st)x(t)dt$ вполне непрерывен и найти его спектр.